

Övningsuppgifter i kombinatorik

Valentin Zulj

Nedan finns ett antal uppgifter i kombinatorik. Försök att lösa dem genom att (i) avgöra om de berör dragning med eller utan återläggning, (ii) avgöra om ordningen spelar roll i den givna kontexten, och (iii) identifiera rätt formel i fyrfältstabellen i formelsamlingen och sedan lösa uppgiften.

Notera: I vissa fall kommer talen i era svar bli väldigt stora, och det kan vara så att din miniräknare inte klarar av att skriva ut dem. Om du har problem med detta kan du använda R som hjälp. Där kan du t.ex. beräkna $n!$ med koden `factorial(n)`, och på liknande sätt kan du beräkna ${}_nC_k$ med koden `choose(n, k)`.

1. En superstjärna från Puerto Rico ska ha konsert på nationalarenan, och hen har lovat lottor ut fyra backstage-pass bland de 10 personer som står längst fram i kön till insläppet. Hur många olika uppsättningar av backstage-besökare är möjliga?
2. Det visar sig ha fler fördelar att stå långt fram i kön till insläppet. Bland nästkommande 10 personer har arrangörerna bestämt att lottor ut checkar av olika värde. Den första checken är värd 1 000 kr, den andra checken är värd 900 kr, den tredje checken är värd 800 kr, och så vidare ner till den tionde checken som är värd 100 kr. Hur många olika sätt kan checkarna delas ut på?
3. Under sin utbytestermin ska en student välja fyra olika kurser, som alla löper på 25% under hela terminens gång. Totalt finns 9 kurser att välja mellan. Hur många olika kurspaket kan studenten skapa?
4. På registreringsskyltar för svenska bilar finns i regel tre siffror och tre bokstäver. Antag att både siffror och bokstäver får upprepas.
 - (a) Hur många olika sifferkombinationer går att skapa?
 - (b) Hur många olika bokstavskombinationer går att skapa.
 - (c) Hur många olika registreringsskyltar går att skapa?
5. Under ett seminarium närvarar 15 studenter, och läraren behöver välja ut 4 av dem för att presentera sin lösningar på tavlan. Hur många olika grupper kan läraren välja?
6. 100-metersfinalen på friidrotts-VM har 8 startande löpare. Hur många olika resultatlistor (inkluderar alla löpare) går det att få på förhand?
7. Ett café erbjuder 7 olika glassmaker. En kund väljer 3 olika smaker. Hur många olika glasskombinationer finns det?
8. Du ska välja ett lösenord som består av 4 bokstäver, där samma bokstav får förekomma flera gånger. Hur många lösenord går att skapa, givet att det finns 29 bokstäver i det svenska alfabetet?
9. Utgå ifrån den föregående uppgiften, men antag nu att lösenordet ska vara 8 bokstäver långt. Hur många lösenord går att skapa då?

10. TV-serien *Black Mirror* har avsnitt som utan problem kan ses i olika ordning. Antag att du vill välja ut två stycken avsnitt ur den senaste säsongen (totalt 6 avsnitt) att se istället för att gå på en föreläsning. Hur många olika sätt går det att välja två avsnitt på?
11. En bokklubb ska välja en ordförande, en sekreterare och en kassör bland 12 medlemmar. Hur många olika styrelser kan bildas?
12. Ett universitet delar ut 5 stipendier till 20 sökande. Alla stipendier är identiska. På hur många sätt kan mottagarna väljas?
13. En student har glömt sin femsiffriga portkod, och bestämmer sig så för att försöka *brute force*:a fram koden. Koden består av fem siffror (0–9), där samma siffra får förekomma flera gånger. Hur många koder kan studenten behöva testa i värsta fall?
14. En föreläsare har skrivit 8 flervalsfrågor och vill slumpmässigt välja ut 3 av dem till ett quiz. Hur många olika quiz kan skapas?
15. Vid en konferens ska 6 personer placeras på en rad med 6 stolar. Hur många olika placeringar är möjliga?
16. En pizzeria erbjuder sina kunder möjligheten att själva välja toppings till sina pizzor. Antag att pizzerian har 10 valbara toppings, och att kunderna måste välja exakt 4 stycken olika. Hur många olika pizzor kan då skapas?
17. Ett WiFi-lösenord består av sex tecken. Varje tecken kan vara någon av siffrorna 0–9.
 - (a) Hur många lösenord går att skapa om samma siffra får användas flera gånger?
 - (b) Hur många lösenord går att skapa om ingen siffra får användas mer än en gång?
18. En lärare har skrivit 18 kombinatorikuppgifter och funderar på att skoja till det lite genom att skriva facit i helt slumpmässig ordning. Hur många olika ordningar skulle lärarens studenter som värst behöva testa för att matcha rätt svar mot rätt fråga?

Facit (endast svar)

1. ${}_{10}C_4 = 210$
2. ${}_{10}P_{10} = 10! = 3\,628\,800$
3. ${}_9C_4 = 126$
4. (a) $10^3 = 1000$
(b) $29^3 = 24\,389$
(c) $10^3 \cdot 29^3 = 24\,389\,000$
5. ${}_{15}C_4 = 1365$
6. ${}_8P_8 = 8! = 40\,320$
7. ${}_7C_3 = 35$
8. $29^4 = 707\,281$
9. $29^8 = 500\,246\,412\,961$
10. ${}_6C_2 = 15$
11. ${}_{12}P_3 = \frac{12!}{(12-3)!} = 1320$
12. ${}_{20}C_5 = 15\,504$
13. $10^5 = 100\,000$
14. ${}_8C_3 = 56$
15. ${}_6P_6 = 6! = 720$
16. ${}_{10}C_4 = 210$
17. (a) $10^6 = 1\,000\,000$
(b) ${}_{10}P_6 = \frac{10!}{(10-6)!} = 151\,200$
18. $18! = 6\,402\,373\,705\,728\,000$. Läraren beslöt sig till slut för att inte genomföra sitt skoj, då $18!$ kändes som några miljoner för mycket.